3.6.10 Konstrukční úlohy

Předpoklady: 030309

Pedagogická poznámka: Na začátku hodiny normálně zadám první příklad s tím, že si žáci mají uvnitř řešení vynechat tak třetinu místa. Nic si na tabuli nekreslím (ani náčrtek), abychom zvýšili pravděpodobnost, že někdo narýsuje situaci, která nemá řešení. Po vyřešení příkladu vyzvu žáky, aby si nakreslili náčrtky situací, které nerýsovali a pak si projdeme jaké části by mělo mít správné učebnicové řešení konstrukční úlohy.

Klasicky řešená konstrukční úloha v české matematice se sestává z následujících částí:

- Rozbor
- Postup konstrukce
- Konstrukce
- Zkouška správnosti
- Diskuse

Co v jednotlivých částech vlastně máme dělat?
Rozbor
Náčrtek situace (zadané prvky, hledané útvary, útvary, které potřebujeme k nalezení výsledku), hledání způsobu, jak využít zadané prvky ze zadání.
Rozbor je vlastně nejdůležitější částí řešení, protože v něm nás musí napadnout, jakým způsobem příklad vyřešit.

Postup konstrukce (už známe, jen jsme ho psali až po konstrukci)
popis jednotlivých kroků, které musíme při konstrukci provést, abychom dospěli k výsledku.
Matematici zkracují zápis pomocí zkratek a symbolů (my to zatím budeme dělat volitelně).
Postup konstrukce píšeme proto, aby každý mohl náš postup zopakovat (z výsledného obrázku to vždy snadno udělat nejde).

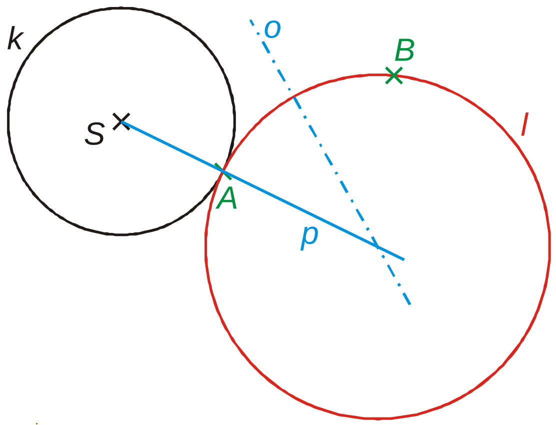
Konstrukce
Vlastní narýsovaný obrázek.

Zkouška správnosti
U narýsovaného obrázku bychom měli ověřit, zda splňuje všechny podmínky v zadání.
Teprve v tomto okamžiku zjistíme, zda jsme příklad vyřešili správně.

Diskuse
Na závěr řešení se diskutuje o počtu řešení, u příkladů, které nejsou zadány jednoznačně pak o tom, zda se počet řešení může měnit v závislosti na konkrétní situaci.

Př. 1: Je dána kružnice $k(S;3\text{cm})$, na které leží bod A, a bod B, který leží vně kružnice k. Sestroj všechny kružnice, které prochází bodem B a dotýkají se kružnice k v bodě A.

Rozbor
Známe dva body, kterými má kružnice procházet $\Rightarrow$ hledáme střed kružnice.



- Kružnice prochází body *A*, *B*, $\Rightarrow$ střed kružnice musí být od obou bodů stejně daleko $\Rightarrow$ leží na ose úsečky *AB*.
- Zdánlivě chybí další údaj v zadání, ale o bodu *A* víme, že kružnice bodem *A* nejen prochází, ale dotýká se v něm kružnice *k* $\Rightarrow$ střed hledané kružnice se musí ležet na přímce *SA* (spojnice středů dvou kružnic, které se dotýkají, prochází bodem jejich dotyku).

Postup konstrukce

1. kružnice $k(S; 3\,\text{cm})$, bod *A*, $A \in k$, bod *B*, $B \notin k$, $|SB| > r$

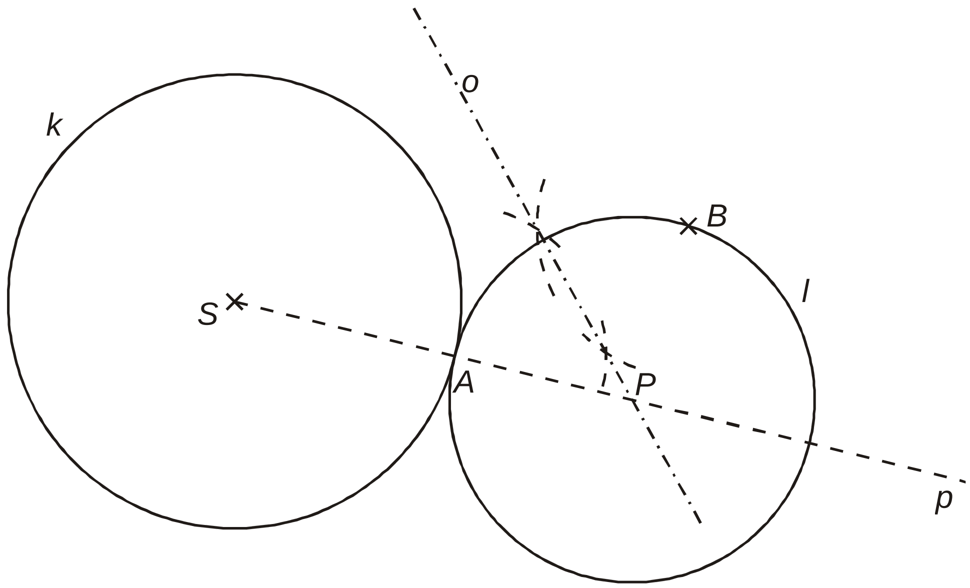
2. přímka o, osa úsečky *AB*

3. přímka *SA*

4. bod *P*, průsečík přímek o a *SA*

5. kružnice $l(P; |PA|)$

Konstrukce



Zkouška správnosti

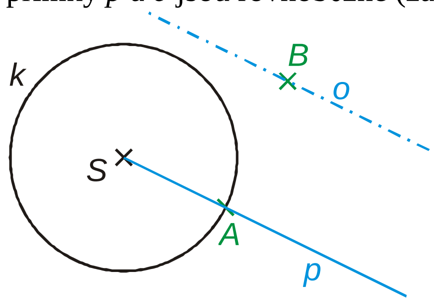
Výsledek odpovídá zadání (kružnice *l* se dotýká kružnice *k* v bodě *A* a prochází bodem *B*).

Diskuse

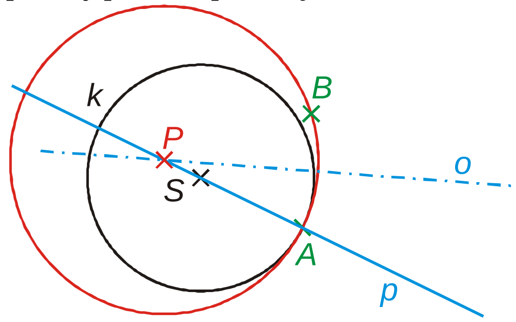
Příklad může mít jedno řešení (pokud se přímky *p* a *o* protnou vně nebo uvnitř kružnice *k*) nebo žádné řešení (pokud jsou přímky *p* a *o* rovnoběžné a neprotnou se).

Dodatek: Náčrtky ostatních situací:

přímky p a o jsou rovnoběžné (žádné řešení)



přímky p a o se protínají uvnitř kružnice (jedno řešení s vnitřním dotykem)

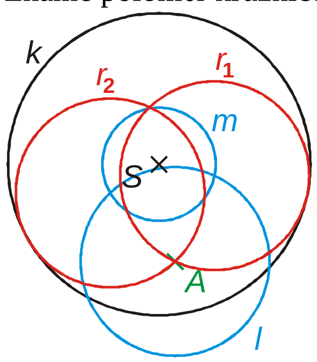


Správný zápis konstrukční úlohy od našeho dosavadního způsobu příliš neliší. Přestože se nám může obecně přijímaný způsob zápisu zdát zbytečně zdlouhavý, budeme ho dodržovat, už jen proto, abychom si zvykli, že často je důležité nejen získat správný výsledek, ale předat jej i v předepsané podobě.

Př. 2: Je dána kružnice $k(S;5\,\text{cm})$ a bod A, který leží uvnitř kružnice k. Sestroj všechny kružnice o poloměru 3cm, které prochází bodem A a s kružnicí k mají vnitřní dotyk.

Rozbor

Známe poloměr kružnice $\Rightarrow$ hledáme její střed.



- Hledaná kružnice prochází bodem A $\Rightarrow$ vzdálenost středu kružnice od bodu A je rovna 5 cm $\Rightarrow$ střed kružnice leží na kružnici $l(A;3\,\text{cm})$
- Hledaná kružnice o poloměru 3 cm se dotýká kružnice k $\Rightarrow$ střed hledané kružnice je od středu kružnice k vzdálen 2 cm $\Rightarrow$ střed kružnice letí na kružnici $m(S;2\,\text{cm})$.

Postup konstrukce

1. kružnice $k(S;5\,\text{cm})$, bod A, $|SA| < 5\,\text{cm}$

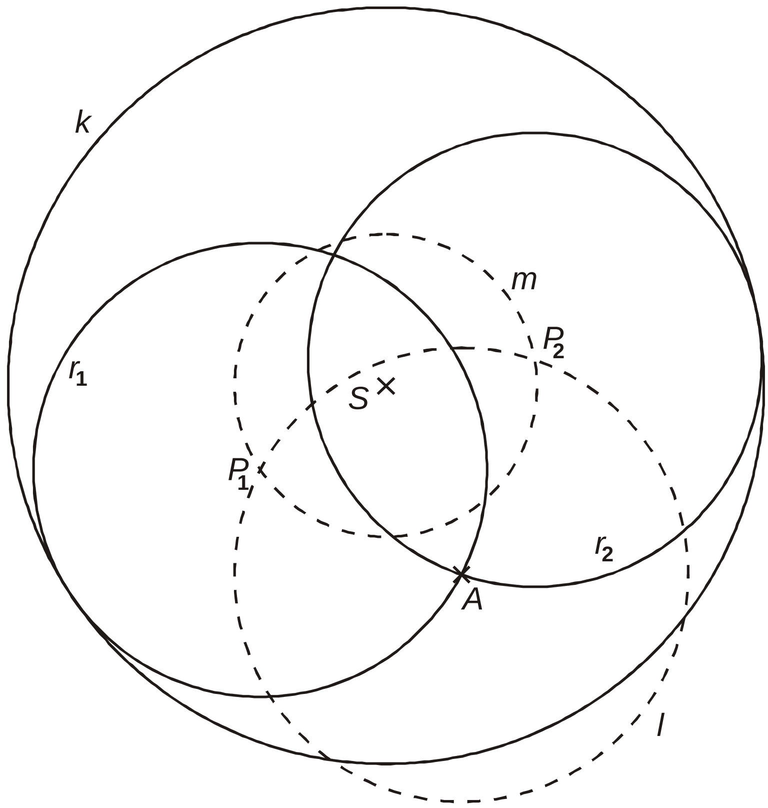
2. $l(A;3\,\text{cm})$

3. $m(S; 2\,\text{cm})$

4. body $P_1; P_2$ průsečíky kružnic l a m

5. kružnice $r_1(P_1; 3\,\text{cm})$, $r_2(P_2; 3\,\text{cm})$

Konstrukce

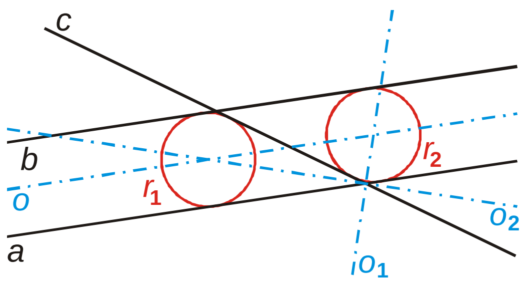


Zkouška správnosti
Výsledek odpovídá zadání (obě kružnice se dotýkají kružnice *k* a prochází bodem *A*).

Diskuse
Příklad má vždy dvě řešení, protože obě kružnice vždy protnou ve dvou bodech (střed kružnice *l* je od středu kružnice *m* vzdálen o méně než 5 cm, protože leží uvnitř kružnice *k*.

Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *a*, *b* a přímka *c*, která je protíná. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají všech tří přímek.

Rozbor



- Hledaná kružnice se dotýká rovnoběžných přímek *a*, *b* $\Rightarrow$ její střed je od obou stejně vzdálený $\Rightarrow$ střed kružnice leží na ose pásu přímek *a*, *b*.

- Hledaná kružnice se dotýká různoběžných přímek a, c $\Rightarrow$ její střed je od obou stejně vzdálený $\Rightarrow$ střed kružnice leží na ose úhlu, který svírají přímky a, c.

Postup konstrukce

1. přímky $a, b, c,\ a \parallel b$, a je různoběžná s c

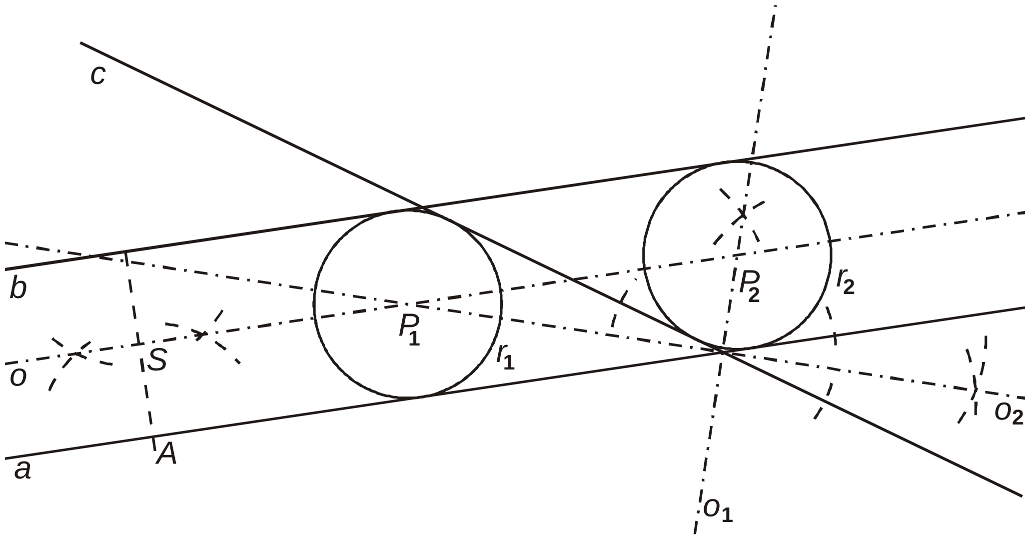
2. bod A, $A \in a$, o, osa pásu přímek a, b, S, $S \in o$

3. o_1, o_2 osy úhlu svíraného přímkami a, c

4. body $P_1; P_2$ průsečíky přímek o_1 a o_2 s přímkou o

5. kružnice $r_1\left(P_1; |SA|\right)$, $r_2\left(P_2; |SA|\right)$

Konstrukce



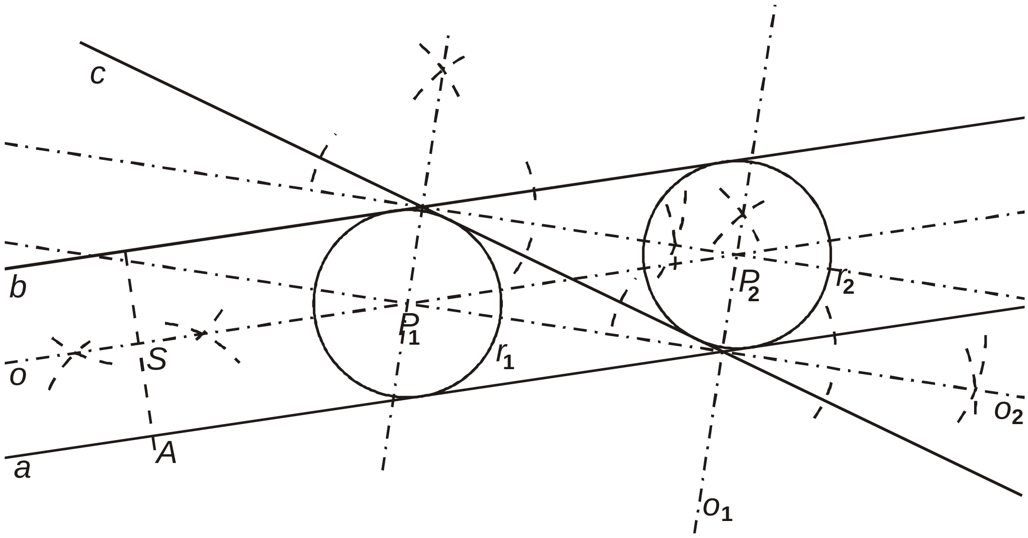
Zkouška správnosti

Výsledek odpovídá zadání (obě kružnice se dotýkají všech tří přímek).

Diskuse

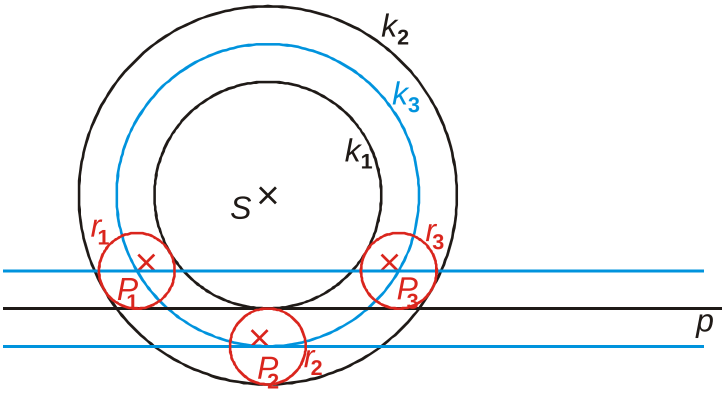
Příklad má vždy dvě řešení, protože pokud je přímka c různoběžná s přímkami a, b, jsou s nimi různoběžné i obě osy o_1 a o_2, jsou tedy rovnoběžné i s osou o a mají s ní každá jeden průsečík.

Dodatek: Z následujícího obrázku je zřejmé, že nezáleží na tom, kterou z dvojic a, c nebo b, c si vybereme pro konstrukci os o_1 a o_2.



Př. 4: Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S;3\text{ cm})$, $k_2(S;5\text{ cm})$ a přímka p od bodu S vzdálená 3 cm. Sestroj všechny kružnice, které se dotýkají přímky p a kružnic k_1 a k_2. Jak závisí počet řešení na vzdálenosti přímky p od středu zadaných kružnic S?

Rozbor



- Hledaná kružnice se dotýká kružnic $k_1(S;3\text{ cm})$ a $k_2(S;5\text{ cm})$ $\Rightarrow$ její střed leží na kružnici $k_3(S;4\text{ cm})$ a její poloměr je 1 cm.
- Hledaná kružnice se dotýká přímky p, má poloměr 1 cm $\Rightarrow$ její střed leží na rovnoběžné přímce, která je od přímky p vzdálená 1 cm.

Středy hledaných kružnic najdeme jako průsečíky kružnice k_3 a rovnoběžek s přímkou p.

Postup konstrukce

1. kružnice $k_1(S;3\text{ cm})$, $k_2(S;5\text{ cm})$

2. přímka p, $|Sp| = 3\text{ cm}$

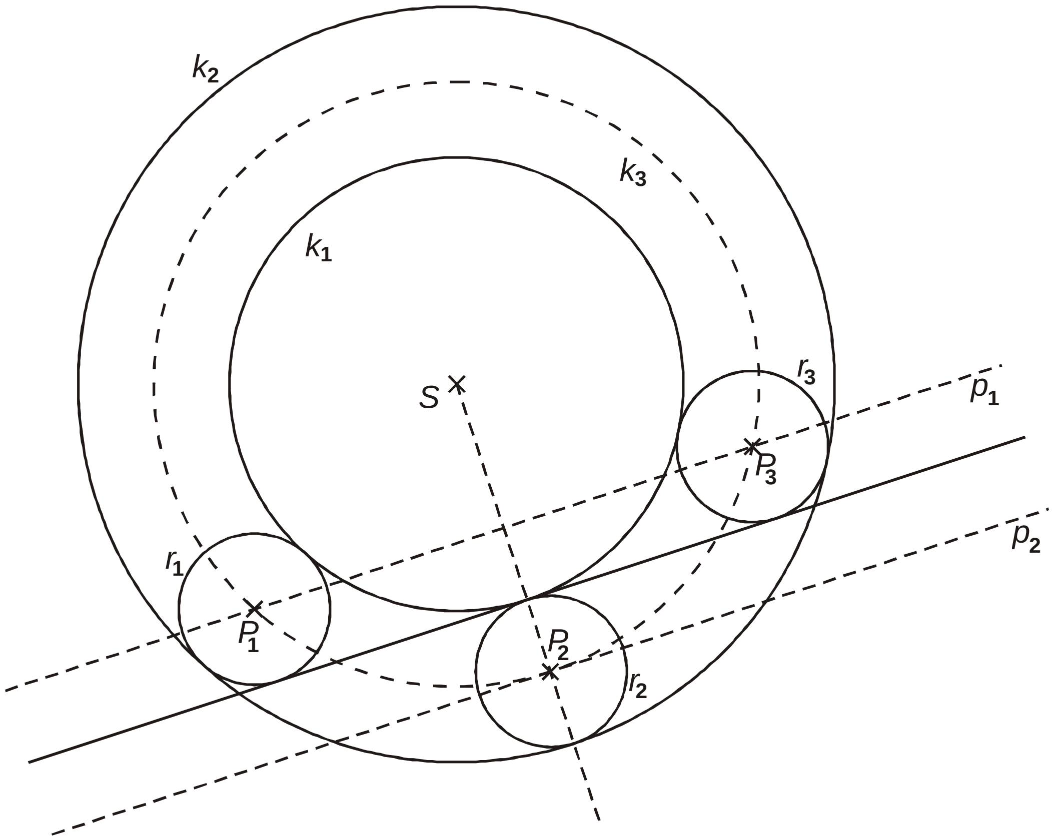
3. kružnice $k_3(S;4\text{ cm})$

3. přímky p_1, p_2, $p_1 \parallel p_2 \parallel p$, $|p_1p| = |p_2p| = 1\text{ cm}$

4. body P_1; P_2; P_3 průsečíky přímek p_1 a p_2 s kružnicí $k_3(S;4\text{ cm})$

5. kružnice $r_1(P_1;1\,\text{cm})$, $r_2(P_2;1\,\text{cm})$, $r_3(P_3;1\,\text{cm})$

Konstrukce



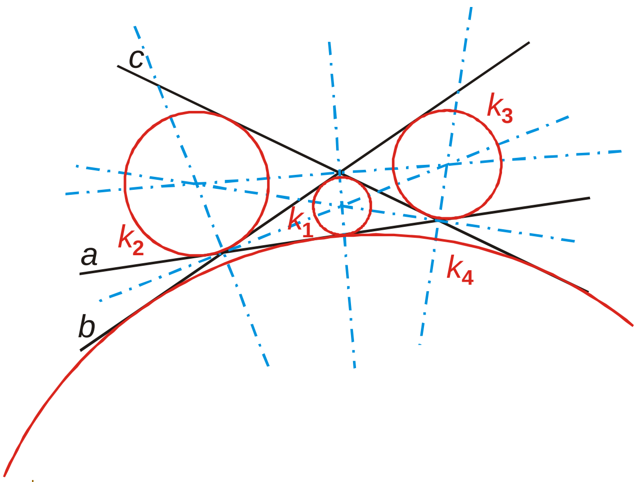
Zkouška správnosti
Výsledek odpovídá zadání (všechny kružnice se dotýkají všech tří přímek).

Diskuse
Závislost počtu řešení příkladu na vzdálenosti přímky *p* od středu *S*:

- $|Sp| < 3\,\text{cm}$: 4 řešení (dva průsečíky přímky p_1 a dva průsečíky přímky p_2 s kružnicí k_3),
- $|Sp| = 3\,\text{cm}$ (naše zadání): 3 řešení (dva průsečíky přímky p_1 a jeden průsečík přímky p_2 s kružnicí k_3),
- $3\,\text{cm} < |Sp| < 5\,\text{cm}$: 2 řešení (dva průsečíky přímky p_1 s kružnicí k_3),
- $|Sp| = 5\,\text{cm}$: 1 řešení (jeden průsečík přímky p_1 s kružnicí k_3),

Př. 5: Jsou dány přímky *a*, *b*, *c*, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné takové, že se neprotínají v jednom bodu. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají všech tří přímek. Při konstrukci zvol polohu přímek *a*, *b*, *c* tak, aby bylo možné na stránku narýsovat všechna řešení příkladu.

Rozbor
Velmi podobné předchozímu příkladu



- Hledaná kružnice se dotýká různoběžných přímek *a*, *b* $\Rightarrow$ její střed je od obou stejně vzdálený $\Rightarrow$ střed kružnice leží na ose úhlu, který svírají přímky *a*, *b*.
- Hledaná kružnice se dotýká různoběžných přímek *a*, *c* $\Rightarrow$ její střed je od obou stejně vzdálený $\Rightarrow$ střed kružnice leží na ose úhlu, který svírají přímky *a*, *c*.

Celkem bychom měli najít čtyři kružnice (jednu uvnitř trojúhelníku, který přímky ohraničují a tří ve vnějších oblastech).

Postup konstrukce

1. přímky *a*, *b*, *c*,

2. o_1, o_2 osy úhlů svíraných přímkami *a*, *b*

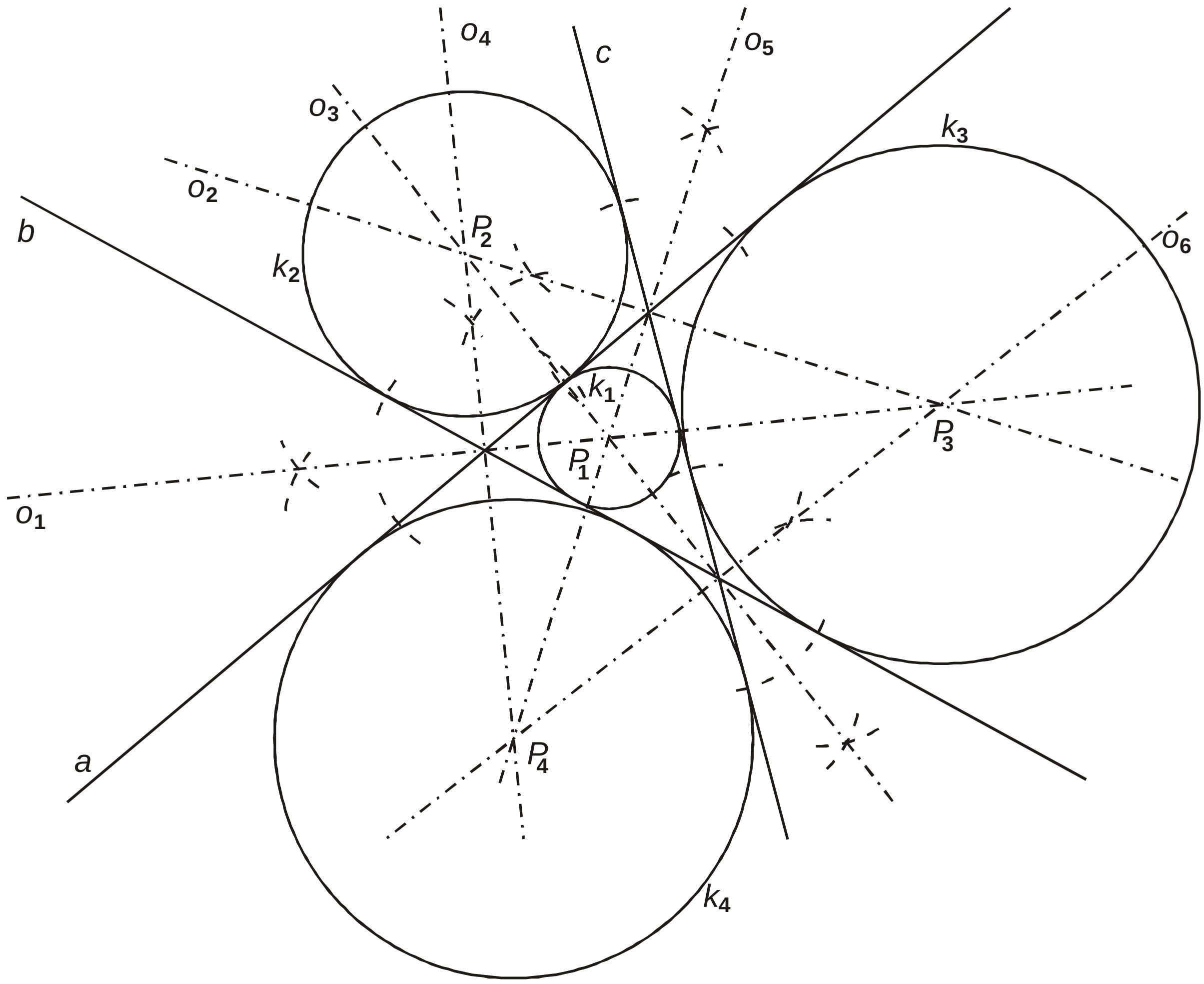
3. o_3, o_4 osy úhlů svíraných přímkami *a*, *c*

3. o_5, o_6 osy úhlů svíraných přímkami *b*, *c*

4. body $P_1; P_2; P_3; P_4$ průsečíky trojic z přímek o_1 až o_6

5. kružnice $k_1(P_1; r_1)$, $k_2(P_2; r_2)$, $k_3(P_3; r_3)$, $k_4(P_4; r_4)$

Konstrukce



Zkouška správnosti
Výsledek odpovídá zadání (všechny kružnice se dotýkají všech tří přímek).

Diskuse
Příklad má vždy čtyř řešení.

Shrnutí: Klasicky řešená konstrukční úloha má následující části: rozbor, zápis konstrukce, konstrukce, zkouška správnosti, diskuse.